UNIVERZITET U NOVOM SADU,
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE 1. REDA I MATEMATIČKI MODELI KOJI SE KONSTRUIŠU POMOĆU NJIH

-Božidar Kozić-

Septembar, 2021.

Sadržaj

stranica

1 Šta je diferencijalna jednačina?

Po definiciji, **diferencijalna jednačina** je jednačina koja predstavlja vezu između nezavisne promenljive (x), zavisne promenljive (y), i izvoda ove zavisne promenljive. Zavisna promenljiva y je predstavljena kao funkcija izražena preko nezavisne promeljive x, tj. $y = f(x)$ ili $y(x)$. U primeni, zavisna promenljiva obično predstavlja fizičku veličinu, izvodi predstavljaju brzinu promene, a diferencijalna jednačina definiše odnos između zavisne promenljive i njenih izvoda.

Red diferencijalne jednačine definišemo kao najviši izvod u toj jednačini. Primer diferencijalne jednačine 1. reda je $y' = 2x$, a primer diferencijalne jednačine 2. reda je $y'' + xy - 1 = 0$.

Prema broju nezavisnih i zavisnih promenljivih, diferencijalne jednačine se dele na sledeće dve grupe:

Obična diferencijalna jednačina (ODJ) je diferencijalna jednačina koju čine jedna nezavisna promenljiva x kao i jedna funkcija te nezavisne promenjive $y(x)$, zajedno sa njenim izvodima, $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$. Opšti implicitni oblik obične diferencijalne jednačine reda n je:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Jednačina 1: *Opšti implicitni oblik ODJ reda n*

Kako obične diferencijalne jednačine najčešće opisuju jednodimenzionalne sisteme, njihova primena se može pronaći u opisivanju modela rasta populacije, modela provođenja toplote, modela raspada radioaktivnog materijala pa i modela širenja virusa.

Parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ) je diferencijalna jednačina koju čine zavisna promenljiva $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sa više nezavisnih promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kao i parcijalni izvodi zavisne promenljive, $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n}; \ldots\ldots; \frac{\partial^n y}{\partial^{n-1} x_n \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial^n x_n}$. Opšti implicintni oblik parcijalne diferencijalne jednačine reda n za funkciju $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y; \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n}; \ldots\ldots; \frac{\partial^n y}{\partial^{n-1} x_n \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial^n x_n}) = 0$$

Jednačina 2: *Opšti implicitni oblik PDJ reda n*

Za razliku od ODJ, parcijalne diferencijalne jednačine obično opisuju višedimenzionalne sisteme, pa se njihova primena može pronaći u opisivanju modela različitih fenomena kao što su zvuk, toplota, elektrodinamika, protok fluida, elastičnost i kvantna mehanika.

Proučavanje diferencijalnih jednačina se uglavnom sastoji iz razmatranja njihovih rešenja, što predstavlja skup funkcija koje zadovoljavaju svaku jednačinu, kao i svojstva njihovih rešenja.

Samo najjednostavnije diferencijalne jednačine se mogu rešiti eksplicitnim formulama, a najprostija diferencijalna jednačina u eksplicitnom obliku je $y' = f(x)$ i kao što vidimo ona je 1. reda. Međutim, mnoga svojstva rešenja date diferencijalne jednačine se mogu odrediti bez tačnog izračunavanja.

Rešenje diferencijalne jednačine je svaka funkcija koja identički zadovoljava tu diferencijalnu jednačinu:

Opšte rešenje diferencijalne jednačine je oblika $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ pri čemu su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

Partikularno rešenje diferencijalne jednačine je svaka funkcija koja se dobija iz opšteg rešenja za posebne vrednosti konstanti. Partikularno rešenje se može odrediti iz početnih uslova.

Singularno rešenje diferencijalne jednačine je ono koje identički zadovoljava datu jednačinu, a ne nalazi se u opštem rešenju.

U kasnijem delu teksta ćemo videti kako se preko običnih diferencijalnih jednačina može modelirati eksponencijalni rast populacije kao i kriva prenošenja COVID-19 virusa. Iz svakodnevnog života smo videli da nam je drugi pomenuti model bio od izuzetnog značaja u protekle dve godine.

2 Šta je obična diferencijalna jednačina?

U prethodnom delu teksta smo spomenuli **obične diferencijalne jednačine** (ODJ) u generalnom smislu, prilikom navođenja vrsta diferencijalnih jednačina. U ovom delu teksta ćemo se posvetiti samo ODJ a kasnije ćemo posmatrati specifično ODJ 1. reda.

Sada ćemo dati detaljniju definiciju ODJ kao i definiciju nekih dodatnih pojmova koje je korisno znati kada se priča uopšte o diferencijalnim jednačinama.

Obična diferencijalna jednačina je diferencijalna jednačina, prvo data u implicitnom obliku:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

zatim i u eksplicitnom (normalnom) obliku:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

Jednačina 3: *Opšti eksplicitni (normalni) oblik ODJ reda n* gde je x nezavisna promenljiva, $y(x)$ zavisna promenljiva, a n je red jednačine.

Početni uslovi za ODJ reda n su oblika:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

ODJ zajedno sa početnim uslovima čini **početni problem**.

Rešenje ODJ je n puta diferencijabilna funkcija $y(x)$ koja zadovoljava identitet $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$.

Partikularno rešenje ODJ je bilo koja funkcija koja je njeno rešenje.

Opšte rešenje ODJ je familija svih njenih rešenja i ona zavisi od n konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Rešenje početnog problema je n puta diferencijabilna funkcija $y(x)$ koja zadovoljava identitet $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ i početne uslove $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

3 ODJ 1. reda i geometrijska interpretacija ODJ 1. reda

3.1 ODJ 1. reda

Videli smo da je ODJ reda n data u normalnom obliku data sa:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

Stoga, možemo definisati ODJ 1. reda, što se dobija kada opšti oblik ODJ datu u normalnom obliku gledamo za $n = 1$.
Iz toga sledi da je ODJ 1. reda u normalnom obliku data sa:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Jednačina 4: *Opšti oblik ODJ 1. reda*

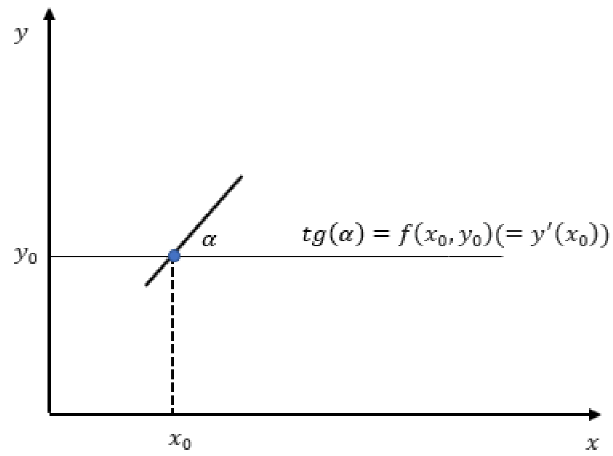
gde je x nezavisna promenljiva, a $y(x)$ zavisna promenljiva.

3.2 Geometrijska interpretacija ODJ 1. reda

Videli smo kako izgleda normalan oblik ODJ 1. reda, a sada ćemo kroz primer videti šta nam ovaj oblik govori o grafičkoj interpretaciji date jednačine.

Pretpostavimo prvo da je funkcija f , za $y'(x) = f(x, y(x))$, definisana i neprekidna nad nekom oblasti $D \subset R^2$.

Linijski element u tački $(x_0, y_0) \in D$ je duž čiji je nagib jednak sa $f(x_0, y_0)$.



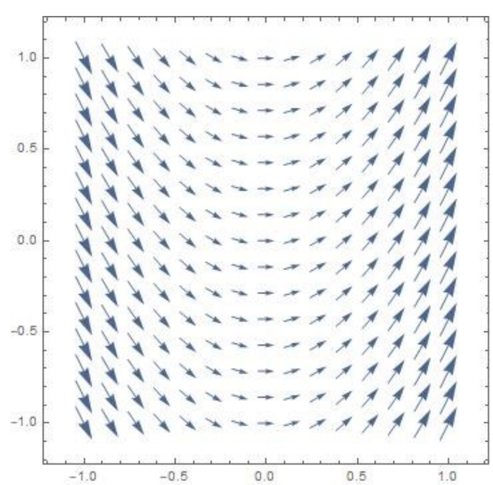
Slika 1: *Linijski element*

Iz Slike 1 možemo da zaključimo da se ugao α, koji linijski element gradi sa pravom paralelnoj x-osi, dobija iz formule $\alpha = arctg(y'(x_0))$

Posmatrajmo funkciju $y = x^2 + C$, gde nam je C konstanta. Diferenciranjem leve i desne strane dobijamo ODJ 1. reda: $y' = 2x$.

Sada ćemo da se upoznamo sa nekim od pojmova koji su bitni za razumevanje i kontrukciju geometrijske interpretacije ODJ 1. reda kroz primer $y' = 2x$.

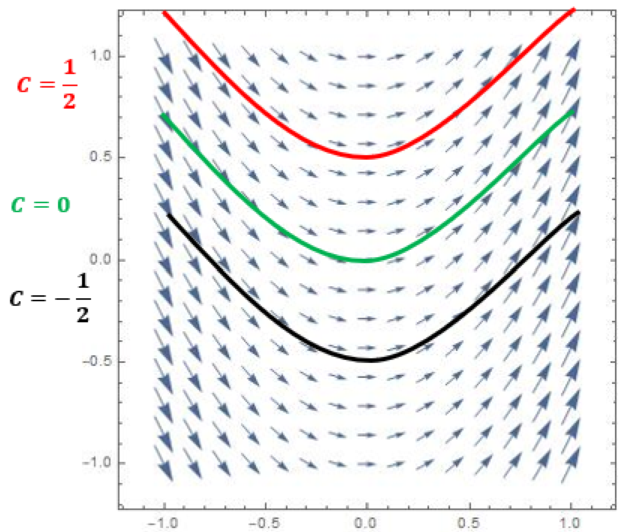
Polje pravaca je skup linijskih elemenata kroz „sve" tačke $(x_0, y_0) \in D$



Slika 2: *Polje pravaca funkcije* $y = x^2 + C$

Bitno je napomenuti da duži koje vidimo **nisu vektori**! Ove duži su jednake, njihova dužina je nebitna, one samo pokazuju nagib.

Integralna kriva je kriva koja je u svakoj tački $(x_0, y_0) \in D$ tangentna na polje pravaca.



Slika 3: *Integralne krive funkcije* $y = x^2 + C$

Funkcija $y(x)$ je **rešenje ODJ** $y'(x) = f(x, y(x))$ ako je grafik te funkcije **integralna kriva**!

Izoklina je kriva koja ima osobinu da u svakoj svojoj tački linijski element ima isti nagib, tj. izokline su krive za koje važi $y'(x) = f(x, y(x)) = K$, gde je K odabran nagib.

Kako da nacrtamo polje pravaca:

1. Odaberemo proizvoljan nagib $K(= y'(x))$.

2. Nađemo sve one tačke u ravni koje imaju isti taj nagib K.

3. Nacrtamo izoklinu za nagib K i na njoj nacrtamo linijske elemente.

4. Menjamo vrednosti za K, crtamo izokline i na njima linijske elemente.

Nađimo sada izokline za $y' = 2x$**:**

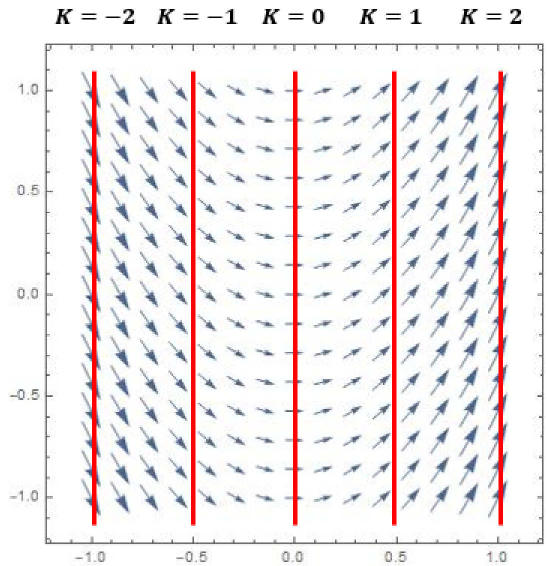
Za $K = -2$ tj. $y' = -2 \Rightarrow x = -1$. Izoklina na kojoj su linijski elemmenti pod uglom $\alpha = arctg(-2) \approx -63^\circ$ je prava $x = -1$.

Za $K = -1$ tj. $y' = -1 \Rightarrow x = -1/2$. Izoklina na kojoj su linijski elemmenti pod uglom $\alpha = arctg(-1) \approx -45^\circ$ je prava $x = -\frac{1}{2}$.

Za $K = 0$ tj. $y' = 0 \Rightarrow x = 0$. Izoklina na kojoj su linijski elemmenti pod uglom $\alpha = arctg(0) = 0^\circ$, tj. linijski element je horizontalan, je prava $x = 0$.

Za $K = 1$ tj. $y' = 1 \Rightarrow x = 1/2$. Izoklina na kojoj su linijski elemmenti pod uglom $\alpha = arctg(1) \approx 45°$ je prava $x = \frac{1}{2}$.

Za $K = 2$ tj. $y' = 2 \Rightarrow x = 1$. Izoklina na kojoj su linijski elemmenti pod uglom $\alpha = arctg(2) \approx 63°$ je prava $x = 1$.



Slika 4: *Izokline za funkciju* $y = x^2 + C$

Nakon što nacrtamo izokline, na osnovu dobijenih uglova α možemo nacrtati i linijske elemente, te tako dobiti polje pravaca za funkciju $y' = 2x$ koje smo videli u tekstu pre!

Kako biste bolje savladali crtanje polje pravaca funkcija, pokušajte sami da nacrtate polje pravaca za funkciju $y' = 2 + 3x - y$!

Sada kada smo prešli neke od pojmova koji su korisni za grafičku interpretaciju ODJ 1. reda, možemo napraviti pregled do sada objašnjenog:

ANALITIČKA INTERPRETACIJA   GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

ODJ 1. reda $y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \Leftrightarrow$ polje pravaca

Opšte rešenje ODJ 1. reda $\Leftrightarrow$ skup svih integralnih krivih

Partikularno rešenje ODJ 1. reda $\Leftrightarrow$ neka izabrana integralna kriva

Rešenje početnog problema $\Leftrightarrow$ integralna kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0)

4 Primeri modela prikazanih preko ODJ 1. reda

Kako bismo mogli da razumemo naredna dva modela koja planiramo da konstruišemo moramo prvo da se upoznamo sa nekim oblicima ODJ 1. reda i njihovim osobinama. Oblike koje ćemo navesti se nazivaju **autonomne ODJ 1. reda.** i **ODJ 1. reda koje razdvajaju promenljive**.

Autonomne ODJ 1. reda su jednačine kod kojih funkcija preko koje je definisiana zavisna promenljiva y' ne zavisi od nezavisne promenljive x i oblika je:

$$y' = f(y)$$

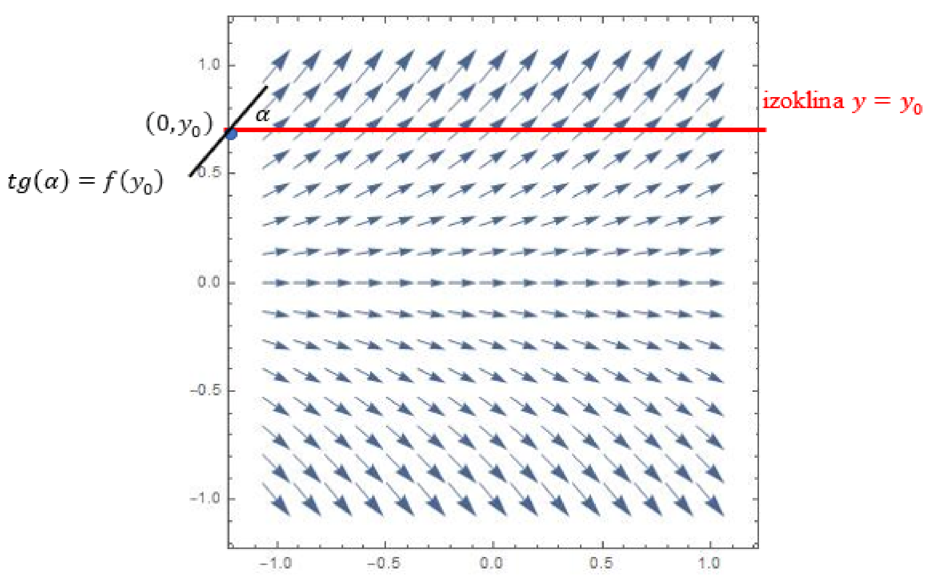
sa datim početnim uslovom $y(x_0) = y_0$.

Možemo i da pronađemo izoklinu za nagib K kod autonomne ODJ 1. reda:

$$\text{iz } y' = f(y) i f(y) = K \text{ sledi } y = f^{-1}(K)$$

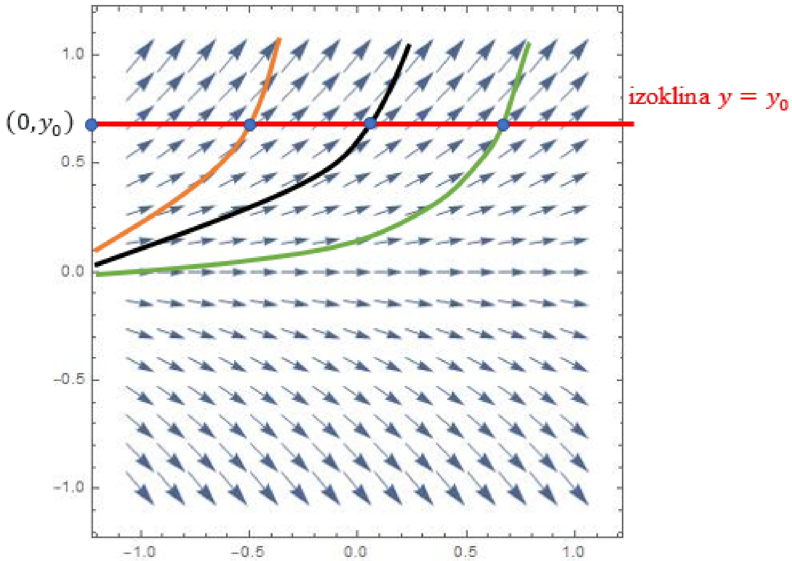
Odavde vidimo da je izoklina oblika $y = f^{-1}(K)$, tj. kako $y = f^{-1}(K) = const.$ ne zavisi od nezavisne promenljive x, dobili smo da su **izokline kod autonomnih ODJ 1. reda horizontalne prave**!

Na primer, ako tražimo linijski element kroz tačku $(0, y_0)$, tada se taj linijski element nalazi pod nagibom $f(y_0)$, a isti nagib će imati i svi linijski elementi koji leže na istoj izoklini, tj. na pravoj $y = y_0$.



Slika 5: *Izoiklina autonomne ODJ 1. reda*

Posledica ove osobine je da su sve integralne krive (rešenja) kod autonomnih ODJ 1. reda **translaciono invariantne** po x-osi, tj. rešenja funkcije za različite integralne krive ostaju ista kada se krećemo po x-osi.



Slika 6: *Translaciona invariantnost integralnih krivih autonomnih ODJ 1. reda*

Kritične tačke autonomnih ODJ 1. reda su sve tačke y_k za koje rešenje funkcije $(y' =)f(y)$ ne postoji ili važi $(y' =)f(y_k) = 0$, tj. skup realnih rešenja jednačine $f(y) = 0$.

Kritične tačke y_k u kojima je $y' = 0$, tj. $y(x) = const$ se nazivaju stacionarne tačke. Uz početni uslov dobijamo $y(x) = y_0$.

Drugim rečima, stacionarna tačka je svaka ona vrednost početnog uslova za koju dobijamo konstatna (stacionarna) rešenja.

Neki od koraka koje možemo da preduzmemo kako bismo bolje analizirali rešenje **autonomnih ODJ 1. reda** bez ekplicitnog rešavanja problema su:

1. Odrediti kritične tačke i analizirati stacionarna rešenja.
2. Odrediti gde je $f(y) > 0$ tj. gde je $y' > 0$, pa ćemo znati gde rešenje raste. Odrediti gde je $f(y) < 0$ tj. gde je $y' < 0$, pa ćemo znati gde rešenje opada.
3. Skicirati polje pravaca i nekoliko integralnih krivih.

ODJ 1. reda koje razdvajaju promenljive su jednačine koje se mogu grupisati kao funkcije od samo jedne promenljive i kao funkcije od samo druge promenljive i oblika su:

$$y' = f(y)g(x)$$

ili ekvivalentni oblik:

$$(y' =)\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$$

sa datim početnim uslovom $y(x_0) = y_0$.

Slično kao kod autonomnih jednačina, uz pretpostavku da su f i g neprekidne funkcije na okolini tačaka y_0 i x_0 redom, i da je $f(y) \neq 0$ na nekoj okolini tačke y_0, dobijamo jedinstveno lokalno rešenje:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

Explicitno rešenje problema dobijamo na sledeći način:

Definišimo funkcije $F(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\xi}$ i $G(x) := \int_{x_0}^{x} g(s)ds$

Tada je rešenje početnog problema $F(y) = G(x)$ tj. $y(x) = F^{-1}(G(x))$.

Pri tome, ako je g neprekidno na $(x_0 - a, x_0 + a)$ i ako je f neprekidno i $f(y) > 0$ (ili ekvivalentno $f(y) < 0$) na $(y_0 - b, y_0 + b)$ tada će rešenje $y(x)$ biti definisano za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, za $0 < \delta < \min(a, b)$.

4.1 Model eksponencijalnog rasta populacije

Sada, kada smo se upoznali sa pojmom i osobinama autonomnih ODJ 1. reda i ODJ koje razdvajaju promenjlive možemo da modeliramo eksponencijalni rast neke populacije!

Parametri modela:
t- vreme ($t \geq 0$)
y- broj jedinki neke populacije u trenutku t ($y \geq 0$)
k- stopa rasta populacije
t_0- fiksiran vremenski trenutak
y_0- broj jedinki neke populacije u trenutku t_0

Pretpostavke modela:

> Promena u broju jedinki populacije po jedinici vremena je proporcionalan trenutnom broju jedinki, a faktor proporcije k je konstantan ($k = \frac{y'(t)}{y}$).

Model je dat sa:

$$(y'(t) =)\frac{dy}{dt} = k \cdot y$$

sa početnim uslovom $y(t_0) = y_0$.

Model možemo eksplicitno rešiti:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = k \cdot dt$$

Integralimo levu i desnu stranu:

Zbog pravilnog zapisa integrala uvodimo smene $y = \xi$ i $dt = ds$, pa naša jednačina dobija sledeći oblik:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{t_0}^{t} kds$$

$$ln(\xi)\Big|_{y_0}^{y} = k \cdot s\Big|_{t_0}^{t}$$

$$ln(y) - ln(y_0) = k(t - t_0)$$

$$ln(\frac{y}{y_0}) = k(t - t_0)$$

$$\frac{y}{y_0} = e^{k(t-t_0)}$$

$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)},\ t \geq 0}$$

Analiza rešenja modela:

1. Tražimo kritične tačke, tj. tačke u kojima je $y'(t) = 0$:

   $$y'(t) = 0 \Leftrightarrow k \cdot y = 0 \Rightarrow k = 0 \ ili \ y = 0$$

   Stacionarno rešenje je $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.U slučaju kada je $k = 0$ tj. kada nema rasta, broj jedinki će zauvek ostati y_0, a ukoliko je $y = 0$, tj. kada je broj jedinki 0, jedinke se uopšte ne mogu razmnožavati.

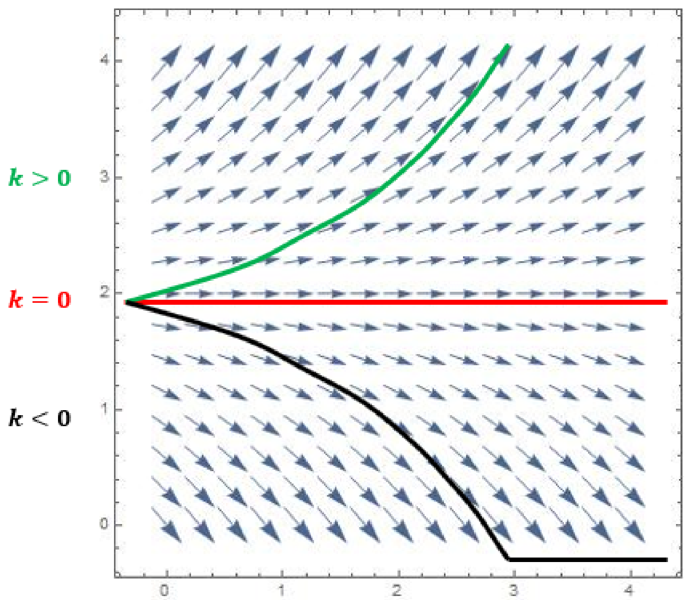
2. Tražimo kada je $y'(t) > 0$ i $y'(t) < 0$:

   $$y'(t) > 0 \Leftrightarrow k \cdot y > 0 \Rightarrow k > 0 \ i \ y \neq 0 \ (y \geq 0)$$
   $$y'(t) < 0 \Leftrightarrow k \cdot y < 0 \Rightarrow k < 0 \ i \ y \neq 0 \ (y \geq 0)$$

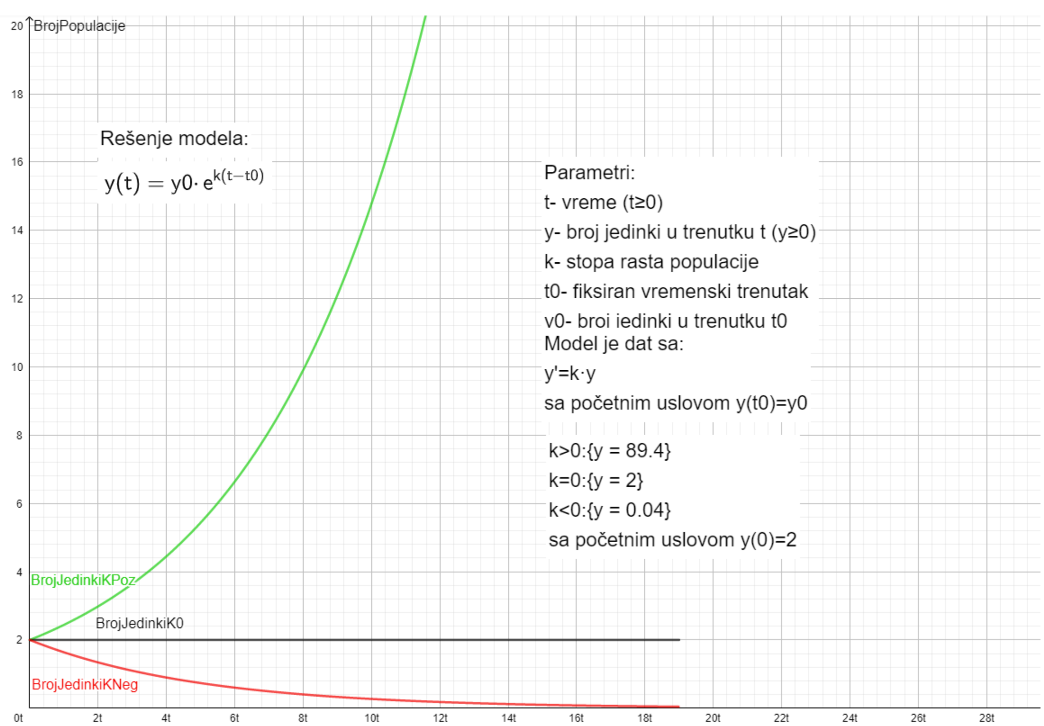
   Dakle vidimo da kada je $k > 0$ tj. kada je stopa rasta pozitivna i $y > 0$ tj. broj jedinki veći od 0, broj populacije će da se povećava, a ukoliko je $k < 0$ tj. stopa rasta negativna, nezavisno od broja jedinki, broj populacije će da se smanjuje. Dobijena rešenja su potpuno prirodna i u skladu sa iskustvima iz naših života.

3. Prikažimo sada nekoliko integralnih krivih:

   Uzmimo da je broj jedinki u početnom trenutku $t_0 = 0$, jednak $y(0) = 2$ $(y(t_0) = y_0)$, tj. početni broj jedinki je $y_0 = 2$. Tada, ako je stopa rasta pozitivna, tj. ukoliko je $k > 0$, broj populacije će eksponencijalno da raste, ako je stopa rasta jednaka nuli, tj. ako je $k = 0$, broj populacije će zauvek ostati y_0, a ako je stopa rasta negativna, tj. $k < 0$, broj populacije će eksponencijalno da opada sve dok ne stigne do 0.



Slika 7: *Vektorsko polje i bitne integralne krive modela eksponencijalnog rasta neke populacije*



Slika 8: *Model eksponencijalnog rasta populacije konstruisan u GeoGebri*

Vidimo da ovaj model ne odgovara u potpunosti realnosti jer pretpostavlja da broj jedinki u populaciji eksponencijalno raste bez ikakvog ograničenja. U stvarnom svetu se dešava da dokle god ima dovoljno hrane, populacija se uvećava, a kasnije kako se broj populacije povećava dolazi do borbe oko resursa te populacija sama sebe ograničava u daljem rastu.

Popravljeni model se predstavlja na sledeći način:

Parametri modela:

t- vreme ($t \geq 0$)
y- broj jedinki neke populacije u trenutku t ($y \geq 0$)
a- stopa rađanja u populaciji ($a > 0$)
b- stopa umiranja u populaciji ($b > 0$)
t_0- fiksiran vremenski trenutak
y_0- broj jedinki u trenutnku t_0

Pretpostavke modela:

> Neto stopa rasta k je jednaka stopi rađanja, umanjenoj za stopu umiranja, gde je stopa umiranja proporcionalna sa brojem jedinki, tj.:
>
> $$k = a - b \cdot y$$

Tada je model dat sa:

$$(y'(t) =)\frac{dy}{dt} = k \cdot y = a \cdot y - b \cdot y^2$$

sa početnim uslovom $y(t_0) = y_0$.

Ovaj model se naziva **Logistički model rasta populacije**, i bolji je od prethodnog jer uzima u obzir rađanja i umiranja jedinki populacije. On se rešava analogno prethodnom stoga se njegovo rešenje i grafički prikaz ostavljaju čitaocu kao vežba radi savladavanja do sada pređenog!

4.2 Model širenja virusa COVID-19

Model koji ćemo konstruisati za opisivanje širenja virusa COVID-19 se skraćeno naziva **SIR model** (eng. SIR: S-susceptible, I-infected, R-removed). Ovo je jedan od najjednostavnih modela koji se koristi u epidemologiji za analizu širenja virusa, ali je njegova upotreba česta jer pruža dobru početnu procenu kako će se posmatrani virus širiti, na osnovu čega možemo da odredimo koje mere treba da preduzmemo kako bi se njegovo širenje usporilo ili zaustavilo.

Parametri modela:

t- vreme ($t \geq 0$)
S- broj jedinki neke populacije koje su podložne da se zaraze virusom u trenutku t
I- broj jedinki neke populacije koje su zaražene virusom u trenutku t
R- broj jedinki neke populacije koje ne mogu više da prenosi virus u trenutku t
a- stopa prenosivosti virusa

b- stopa po kojoj jedinke neke populacije ne mogu više da prenose virus
t_0- fiksiran vremenski trenutak
S_0- broj jedinki neke populacije koje su podložne da se zaraze virusom u trenutku t_0
I_0- broj jedinki neke populacije koje su zaražene virusom u trenutku t_0
R_0- broj jedinki neke populacije koje ne mogu da se zaraze virusom u trenutku t_0

Pretpostavke modela:

1. Epidemija virusa traje relativno kratko, tj. možemo da pretpostavimo da je broj jedinki neke populacije konstantan, tj. $S+I+R=const$.
2. Stopa prenosivosti virusa je proporcionalna kontaktu između podložnih i zaraženih jedinki neke populacije, tj. što ima više kontakta između podložnih i zaraženih jedinki neke populacije, to se virus brže širi
3. Stopa po kojoj zaražene jedinke neke populacije ne mogu više da prenose virus je konstantan.
4. Broj susreta između jedinki vrsti x i jedinki vrsti y predstavljamo sa $x \cdot y$

Model je dat sa:

$$\begin{aligned} (S'(t)=)\ \frac{dS}{dt} &= -a \cdot S \cdot I \\ (I'(t)=)\ \frac{dI}{dt} &= a \cdot S \cdot I - b \cdot I \\ (R'(t)=)\ \frac{dR}{dt} &= b \cdot I \end{aligned}$$

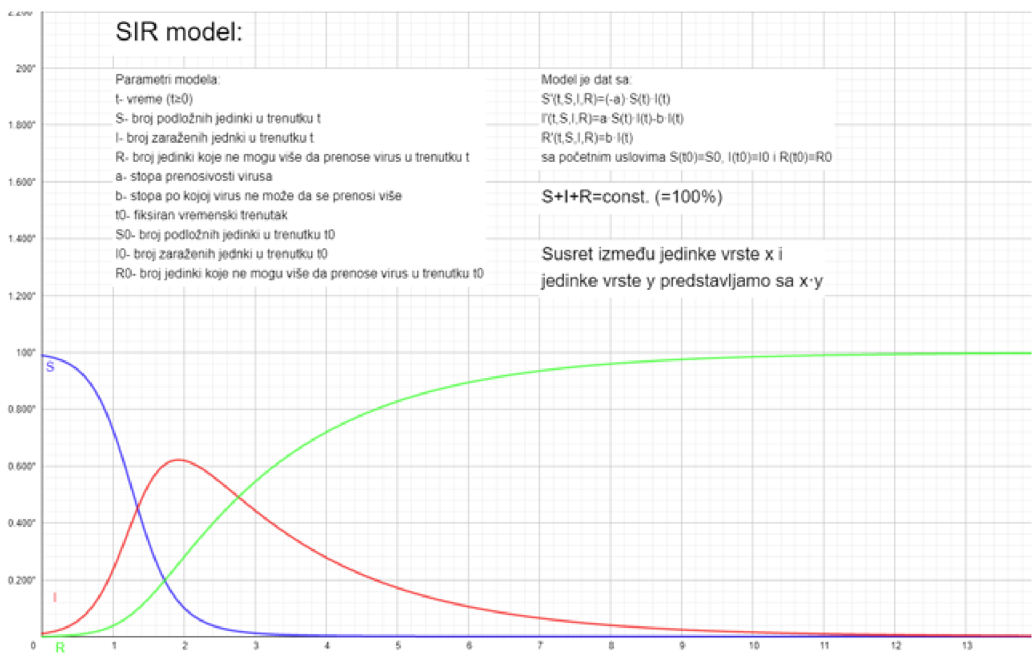
sa početnim uslovima $S(t_0)=S_0$, $I(t_0)=I_0$, $R(t_0)=R_0$.

Jednačinu $S'(t)=-a \cdot S \cdot I$ tumačimo na sledeći način: broj podložnih jedinki neke populacije će se vremenom smanjivati kako ljudi postaju zaraženi. Ovde $S \cdot I$ predstavlja broj susreta između podložnih i zaraženih.

Jednačinu $I'(t)=a \cdot S \cdot I - b \cdot I$ tumačimo na sledeći način: broj zaraženih jedinki neke populacije će se vremenom povećavati za broj jedinki koji su prešli iz podložnih u zaražene, ali će da se smanju za broj jedinki koji su se oporavili od virusa ili su umrli od njega.

Jednačinu $R'(t)=b \cdot I$ tumačimo na sledeći način: broj jedinki neke populacije koja ne može više da prenosi virus je jednak broju jedinki koji su se oporavili od virusa ili umrli od njega.

Ukoliko konstruišemo ovaj model u programu GeoGebra, možemo jasno da vidimo krive koje se formiraju:



Slika 9: *SIR model konstruisan u GeoGebri*

SIR model je upravo zbog svoje jednostavnosti lako shvatljiv, a opet pruža dobre procene pirlikom modeliranja širenja raznih virusa, pa i virusa COVID-19!

5 Dodatni materijal

Pored primera koji su u tekstu zadati čitaocu za vežbu kako bi savladao pročitano, ostavljeni su i još neki zanimljivi izvori pomoću kojih se dodatno možete informisati o temi ODJ 1. reda kao i o konstrukciji raznih modela koji preko diferencijalnih jednačina opisuju dešavanja u prirodi:

Ukoliko ste zainteresovani za detaljnije proučavanje ODJ: http://th.if.uj.edu.pl/~biernat/ksiazki/Jordan%20-%20Nonlinear%20Ordinary%20Differential%20Equations%204e%20(Oxford,%202007).pdf

Logistički model rasta populacije: https://youtu.be/aP4YXOo-Uko

Opšte matematičko modeliranje epidemija: https://www.mdpi.com/2227-7390/8/7/1174/htm

Ukoliko ste zaiteresovani za detaljniji opis SIR modela: https://www.youtube.com/watch?v=NKMHhm2Zbkw&list=LL&index=1&ab_channel=TomRocksMaths

Analitičko rešenje diferencijalnih jednačina iz SIR modela: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7521893/

Model Lovac-Žrtva (Predator-Prey model): https://www.youtube.com/watch?v=M0nRWcF1WJw&ab_channel=Numberphile

6 Literatura

[1] Dora Seleši (2016.): „Uvod u Obijčne Diferencijalne Jednačine" (https://drive.google.com/drive/u/0/folders/0Bw17Mdi2uyXYelZ0a1REazRHM1k?resourcekey=0Tj3x1MOvyEoHnJBflW68nw)

[2] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Douglas B. Meade (2017.): „Elementary Differential Equations" (https://books.google.rs/books?hl=sr&lr=&id=WsaVDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR7&dq=differential+equations&ots=EUfBsYf9Qv&sig=qB4AowdrjarwwxuF92q79CfDuC4&redir_esc=y#v=onepage&q=differential%20equations&f=false)

[3] Anton Bilimović (1986.): „Diferencijalne jednačine sa dopunama" (http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/3381/bil4FF.pdf?sequence=1)

[4] Peter J. Olver (2007.): „ Nonlinear Ordinary Differential Equations" (https://www-users.cse.umn.edu/~olver/ln_/odq.pdf)

[5] Analytical features of the SIR model and their applications to COVID-19: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7521893/